MA'RUZA

TO'LA DIFFERENSIALLI TENGLAMALAR. LAGRANJ VA KLERO TENGLAMALARI

Mavzuning rejasi

1. Bernulli tenglamasi.
2. To'la differensialli tenglama.
3. Klero va Lagranj tenglamalari.

Tayanch so'z va iboralar: *Bernulli tenglamasi, umumiy integral, bo'laklab integrallash, uzluksiz differensiallanuvchi, to'la differensial, xususiy hosila, zaruriy shart, yetarli shart, integrallovchi ko'paytiruvchi, integral egri chiziqlar oilasining o'ramasi, Klero tenglamasi, yordamchi parametr, to'g'ri chiziqlar oilasi, maxsus yechimi, Lagranj tenglamasi.*

1.Bernulli tenglamasi

Bernulli tenglamasi deb,

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^{n} \tag{1}$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bunda $P(x)$ va $Q(x)$ - x ning uzluksiz funksiyalari $n\neq 0$ va $n\neq 1$ (aks holda chiziqli tenglama hosil bo'lar edi). Bu tenglamani chiziqli tenglamaga keltirish uchun uni barcha hadlarini y^{n} ga hadma-had bo'lamiz

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q \tag{2}$$

Endi

$$z=y^{-n+1} \tag{3}$$

almashtirishni bajaramiz U holad (4) tenglama hosil bo'ladi.

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+Pz=0 \tag{4}$$

(4) va(3) larni (2) ga qo'ysak, z va x ga nisbatan chiziqli differensial tenglama hosil bo'ladi.

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)Pz=(-n+1)Q \tag{5}$$

Buning umumiy integralini topib, z o'rniga ifodani y^{-n+1} qo'yib, Bernulli tenglamasi integralini quyidagicha topamiz.

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)Pz=(1-n)Q \tag{5`}$$

$$P_1(x)=(1-n)P(x), \quad Q_1(x)=(1-n)Q(x).$$

$z=e^{-\int P_1(x)dx}\left[\int Q_1(x)e^{\int P_1(x)dx}dx+C\right]$ formulaga asosan hamda (3)ni e'tiborga olsak,

$$y^{1-n}=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left[\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right] \tag{6}$$

Bernulli tenglamasining umumiy integralini topish formulasi bo'ladi.

1-misol: $\frac{dy}{dx}+xy=x^{3}y^{3}$ tenglamani yeching.

*Yechish***:** Tenglamani hamma hadlarini y^{3} ga bo'lamiz, $y^{-3}y'+xy^{-2}=x^{3}$ (a) tenglama hosil bo'ladi. Bunda $z=y^{-2}$ almashtirish olsak $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ bo'ladi. Buni (a) tenglamaga qo'yib, $\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^{3}$ (b) ni hosil qilamiz. (b) tenglamani umumiy integralini $y=uv$ $\frac{dz}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$,

z va $\dfrac{dz}{dx}$ ning ifodalarini (b) tenglamaga qo'ysak, $u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}-2xuv=-2x^3$ yoki $u\left(\dfrac{dv}{dx}-2xv\right)+v\dfrac{du}{dx}=-2x^3$. Bundan $\dfrac{dv}{dx}-2xv=0$ dan $\dfrac{dv}{v}=2xdx \Rightarrow \ln|v|=x^2 \Rightarrow v=e^{x^2}$. u ni aniqlash uchun $e^{x^2}\dfrac{dv}{dx}=-2x^2$ tenglamani hosil qilamiz. O'zgaruvchilarni ajratib $du=-2e^{-x^2}x^3dx \Rightarrow$ $u=-2\int e^{-x^2}x^3dx+C$ ni bo'laklab integrallab, $u=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C$, $z=uv=x^2+1+Ce^{x^2}$ ekanligini topamiz. Demak, berilgan tenglamani umumiy integrali $y^{-2}=x^2+1+Ce^{x^2}$ yoki
$\dfrac{1}{y^2}=x^2+1+Ce^{x^2}$, $n=3,\ P=x,\ Q=x^3$. Bularni (6)ga qo'ysak,
$y^{-2}=e^{\int 2xdx}\left[\int(-2)x^3e^{-\int 2xdx}dx+C\right]$,
$y^{-2}=e^{-x^2}\left[-\int x^3e^{-x^2}dx+C\right]$, $y^{-2}=e^{x^2}(x^3e^{-x^2}+e^{-x^2}+C)$ yoki $\dfrac{1}{y^2}=x^2+1+Ce^{x^2}$ berilgan Bernulli tenglamasini umumiy integrali bo'ladi.

2.To'la differensialli tenglama

Ta'rif: Agar

$$M(x,y)dx+N(x,y)=0 \qquad (1)$$

tenglamada $M(x,y)$ va $N(x,y)$ funksiyalar uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, bular uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

munosibat bajarilsa (1) tenglama to'la differensialli tenglama deyiladi. Bunda $\dfrac{\partial M}{\partial N}$ va $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ funksiyalar biror sohada uzluksiz funksiyalardir. Agar (1) tenglamaning chap tomoni to'la differensial bo'lsa, u holda (2) shartning bajarilishi va aksiga (2) shart bajarilsa (1) tenglamaning chap tomoni to'la differensial bo'lsa, u holda (2) shartning bajarilishi va aksiga (2) shart bajarilsa, (1) tenglamaning chap tomoni biror $u(x,y)$ funksiyaning to'la bo'lishini isbotlaymiz, ya'ni (1) tenglamani ko'rinishi

$$du(x,y)=0 \qquad (3)$$

bo'ladi, demak uning umumiy integrali $u(x,y)=C$ bo'ladi.

Dastlab, (1) tenglamaning chap tomonini biror $u(x,y)$ funksiyaning to'la differensiyali deb faraz qilamiz, ya'ni $M(x,y)dx+N(x,y)dy=du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$. U holda

$$M=\frac{\partial u}{\partial x},\quad N=\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4)$$

ni birinchisini y bo'yicha, ikkinchisini x bo'yicha xususiy hosilalarini topamiz.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$$

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini uzluksiz deb faraz qilsak, $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ bo'ladi, ya'ni (2) tenglik (1) tenglamaning chap tomoni biror $u(x,y)$ funksiyaning to'la differensiali bo'lishining zaruriy shartidan biridir. Bu shartning yetarli shart bo'lishi, ya'ni (2) tenglik bajarilganda (1) tenglamaning chap tomoni biror $u(x,y)$ funksiyaning to'la differensiyali bo'lishini ko'rsatamiz. $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$ munosabatdan $u=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y)$ ni topamiz, bunda x_0-mavjud bo'lgan sohadagi ixtiyoriy nuqtaning abssissasi. x bo'yicha integrallashda y ni o'zgarmas deb hisoblaymiz va shuning uchun integrallashda hosil bo'lgan ixtiyoriy o'zgarmas y ga bog'liq bo'lishi mumkin. y ni (4) munosabatlardan ikkinchisi bajariladigan qilib tanlab olamiz. Buning uchun keyingi tenglikni ikkala tomonini y bo'yicha differensiallab natijani $M(x,y)$ ga tenglasak: $\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+\varphi(y)=N(x,y)$, ammo, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ bo'lgani uchun quyidagini yozamiz $\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N(x,y)$ dan $N(x,y)\Big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=N(x,y)$ yoki

$$N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y)$$

Demak, $\varphi'(y)=N(x_0,y_0)$ yoki $\varphi(y)=\int_{x_0}^{x}N(x,y)dy+C_1$. Shunday qilib, $u(x,y)$ funksiya $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{x_0}^{x}N(x,y)dy+C_1$ ko'rinishda bo'ladi. Bunda $P(x_0,y_0)$ shunday nuqtani, uning biror atrofida (1) tenglamaning yechimi mavjud. Bu ifodani ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorda tanlab, (1) tenglamaning umumiy integralini hosil qilamiz.

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{x_0}^{x}N(x_0,y)dy=C$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{x_0}^{x}N(x,y)dy=C \qquad (6)$$

bo'ladi.

2-misol: $\frac{2x}{y^2}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ tenglamani umumiy integralini toping.

Yechish: Bu yerda $M=\frac{2x}{y^2}$, $N=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$ $(y\neq 0)$ deb olamiz, u holda

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4},\ \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}$$

Demak, (2) shart bajariladi. U holda tenglamani chap tomoni $u(x,y)$ funksiyaning to'la differensiyali bo'ladi. Bu funksiyani topamiz: $\frac{du}{dx}=\frac{2x}{y^3}$ bo'lagani uchun $u=\int\frac{2x}{y^3}dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y)$, bunda $\varphi(y)$ funksiya y ning noma'lum funksiyasi. Buni y bo'yicha differensiallab va $\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$ ekanligini e'tiborga olib, $-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$ bo'lishini topamiz. Demak, $\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}$, $\varphi(y)=-\frac{1}{y}+C_1$, $u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C_1$.

Shunday qilib, dastlabki tenglamaning umumiy integrali $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$ yoki $x^2-y^2=Cy^3$ bo'ladi.

3.Integrallovchi ko'paytuvchi

Bizga

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

tenglama berilgan bo'lsin va uning chap tomoni biror funksiyali to'la differensiyali bo'lmasin. U holda, ba'zan, shunday $\mu(x,y)$ funksiyani tanlab olish mumkin bo'ladiki, tenglamaning barcha hadlarini shu ko'paytuvchiga ko'paytirilganda tenglamaning chap tomoni biror funksiyani to'la differensialini beradi. Shu usul bilan topilgan tenglamaning umumiy yechimi dastlabki tenglamani umumiy yechimi bilan bir xil bo'ladi. $\mu(x,y)$ funksiya (1) tenglamaning integrallovchi ko'paytiruvchisi deyiladi. Integrallovchi ko'paytuvchini topish uchun hozircha bizga noma'lum bo'lgan $\mu(x,y)$ ga (1)ni har ikkala tomonini ko'paytiramiz:

$$\mu Mdx+\mu Ndy=0\,. \qquad (2)$$

(2) tenglama to'la differensialli tenglama bo'lishi uchun quyidagi tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\ , \qquad (3)$$

ya'ni

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

yoki

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right). \qquad (4)$$

Bu tenglamani har ikkala tomonini μ ga bo'lib,

$$M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y} \qquad (5)$$

tenglik hosil qilamiz. (5) tenglamani qanoatlantiruvchi har qanday $\mu(x,y)$ funksiya (1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi bo'ladi. (5) tenglama ikkita x va y o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan μ noma'lum funksiyaga nisbatan xususiy hosilali tenglamadir. Ma'lum shartlar bajarilganda bu tenglamani yechimlari cheksiz ko'p ekanini va (1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi bor ekanligini isbotlaymiz. Ammo, umumiy holda (5) tenglamaning integralovchi ko'paytuvchisi $\mu(x,y)$ ni topish (1) tenglamani integrallashga nisbatan qiyinroq. Faqat ba'zi xususiy hollardagina $\mu(x,y)$ topish mumkin. Masalan, (1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi faqat y ga bog'liq bo'lsin. Bu holda $\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=0$ va μ ni topish uchun $\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ oddiy differensial tenglama hosil bo'ladi: bunda (bitta kvadratura bilan) $\ln\mu$ aniqlanib undan μ topiladi. Bunday ish ko'rish $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ifoda x ga bog'liq bo'lmagan holdagina qo'llaniladi. Shunga o'xshash, agar $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ ifoda y ga bog'liq bo'lmasdan, faqat x ga bog'liq bo'lsa, u holda faqat x ga bog'liq bo'lmagani integrallovchi ko'paytuvchi oson topiladi.

3-misol: $(y+xy^2)dx - xdy = 0$ tenglamni yeching.

Yechish: Bu yerda $M = y + xy^2,\ N = -x$, $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ Demak, to'la differensialli tenglama emas. Bu tenglamani faqat y ga bog'liq bo'lgan integrallovchi ko'paytuvchisi bor ekanlini tekshiramiz.

$\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = \dfrac{-1-1-2xy}{y+xy^2} = \dfrac{2}{y}$ ekanligidan integrallovchi ko'paytuvchisi bor degan xulosaga kelamiz va uni quyidagicha topamiz.

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\frac{2}{y} \Rightarrow \quad \ln \mu = -2\ln y \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Berilgan tenglamani har ikkala tomonini μ ga ko'paytirib,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$

bo'lganini, ya'ni to'la differensialli tenglama hosil qilinganligiga ishonch hosil qilamiz va tenglamani yechib, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{2} + C = 0 \Rightarrow \quad y = -\dfrac{2x}{x^2+2C}$ umumiy yechimini topamiz.

Birinchi tartibli differensial tenlamalarning maxsus yechimlari.
Klero va Lagranj tenglamasi

Faraz qilaylik

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \qquad (1)$$

differensial tenglamaning umumiy integrali

$$\Phi(x, y, C) = 0 \qquad (2)$$

tenglamaga mos integral egri chiziqlar oilasining o'ramasi mavjud, deb faraz qilamiz. Bu o'rama (1) differensial tenglamani integral egri chizig'i bo'ladi.

Ta'rif: Agar L chiziq o'zining har bir nuqtasi bilan bir parametrli chiziqlar oilasining u yoki bu chizig'iga urinsa, L chiziq bir parametrili chiziqlar oilasining o'ramasi deyiladi. (1-rasm).

4.Klero tenglamasi

Klero tenglamasi deb ataluvchi

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad (1)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglama yordamchi parametr kiritish usuli bilan integrallanadi. Agar $\dfrac{dy}{dx} = p$ deb olsak, (1) tenglama quyidagicha bo'ladi.

$$y = xp + \psi(p) \qquad (2)$$

$p = \dfrac{dy}{dx}$ ni x ning funksiyasi ekanligini e'tiborga olib, so'ngra tenglamani barcha hadlarini x bo'yicha differensiallaymiz. $p = x\dfrac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\dfrac{dp}{dx} \Rightarrow$

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0 \qquad (3)$$

ni hosil qilamiz. Har bir ko'paytuvchini alohida nolga tenglab,

$$\frac{dp}{dx} = 0 \qquad (4)$$

va

$$x+\psi'(p)=0 \qquad (5)$$

tengliklarni hosil qilamiz:

1. (4) tenglikni integrallasak $p=C$ $(C-const)$ bo'ladi, p ning bu qiymatini (2) ga qo'ysak, uni

$$y=xC+\psi(C) \qquad (6)$$

umumiy integralni topamiz; bu geometrik nuqtai nazardan to'g'ri chiziqlar oilasi bo'lishligini ko'rsatadi.

2. Agar (5) tenglamadan p ni x ning funksiyasi kabi topsak, uni (2) tenglikka qo'ysak, u holda

$$y=xp(x)+\psi[p(x)] \qquad (7)$$

hosil bo'ladi: bu funksiya (1) tenglamaning yechimi bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, (5) tenglikka muvofiq $\frac{dy}{dx}=p+[x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}=p$. Shuning uchun (7) funksiyani (1) tenglamaga qo'yib,

$$xp+\psi'(p)=xp+\psi(p)$$

ayniyatni hosil qilamiz. (7) yechim (6) umumiy integraldan C ning hyech bir qiymatida hosil bo'lmadi. Shuning uchun bu maxsus yechimdir. Bu yechim $y=xp(x)+\psi[p(x)]$, $x+\psi'(p)=0$ tenglamalar sistemasidan C parametrni yo'qotish natijasida yoki $\begin{cases} y=xC+\psi(C) \\ x+\psi'_C(C)=0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasidan C parametrni yo'qotish natijasida hosil qilinadi. Demak, Klero tenglamasining maxsus yechimi (6) umumiy integral bilan berilgan to'g'ri chiziqlar oilasining o'ramasini aniqlar ekan.

4-misol: $y=xy'+\frac{ay'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ $(a>0)$ differensial tenglamaning umumiy va maxsus integrallarini toping.

Yechish: Berilgan tenglamada $y'=\frac{dy}{dx}$ ning o'rniga C ni qo'ysak, $y=xC+\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$ umumiy integral hosil bo'ladi. Maxsus yechimni hosil qilish uchun keyingi tenglamani C bo'yicha differensiallab

$x+\frac{a}{(1+C^2)^{\frac{3}{2}}}=0$ ni topamiz.

U holda maxsus yechim o'rama tenglamalari. $\begin{cases} x=-\frac{a}{(1+C^2)^{3/2}} \\ y=\frac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}} \end{cases}$ parametrik ko'rinishda hosil bo'ladi. Bundan C parametrni yo'qotsak, x va y orasidagi munosabatni bevosita hosil qilishimiz mumkin. Har bir tenglama ikkala tomonini $\frac{2}{3}$-darajaga ko'tarib va hosil bo'lgan tenglamalarni hadma-had qo'shsak, $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ maxsus yechimni hosil qilamiz. Bu astroidani tenglamasidir. Ammo, oilaning o'ramasi maxsus yechimi ham butun astroida bo'lmay, balki uning chap yarimidan iborat, chunki o'ramaning parametrik tenglamalaridan $x\le 0$ ekanligi ma'lum.

5.Lagranj tenglamasi

Lagranj tenglamasi deb $y=x\varphi(y')+\psi(y')$ (1) ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda ψ va φ lar $y'=\frac{dy}{dx}$ ning ma'lum funksiyalaridir. Bu tenglama x va y larga nisbatan chiziqli tenglama. Avval ko'rilgan Klero tenglamasi Lagranj tenglamasini $\varphi(y') = y'$ bo'lgandagi xususiy holidir. Lagranj tenglamasini integrallash Klero tenglamasini integrallash kabi yordamchi p parametr kiritish usuli bilan integrallanadi. Agar $y' = p$ deb olsak. (1) ni $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ shaklda yozamiz. (2)ni x ga nisbatan differensiallab, $p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$ ni hosil qilamiz.

Bundan $p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$ (3) tenglamani yozamiz. Bu tenglamadan esa ba'zi yechimlarni birdaniga topish mumkin, bu p ning $p_0 - \varphi(p_0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday o'zgarmas $p = p_0$ qiymatida ayniyatga aylanadi. Haqiqatan ham, p ning o'zgarmas qiymatida hosila

$\frac{dp}{dx} = 0$ va (3) tenglamaning ikkala tomoni nolga aylanadi. Har bir $p = p_0$, ya'ni $\frac{dy}{dx} = p_0$ qiymatga mos bo'lgan yechim x ning chiziqli funksiyasi bo'ladi. Buni topish uchun (2) tenglamaga $p = p_0$ qiymatni qo'yamiz $y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$. Lekin, bu yechim integraldan ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarning hyech bir qiymatida hosil bo'lmasa, u holda bu maxsus yechim bo'ladi. Endi umumiy yechimni topish uchun (3) tenglamani $\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$ ko'rinishga yozib va x ni p ning funksiyasi deb qaraymiz. Bu holda hosil qilingan tenglama p ning x funksiyasiga nisbatan chiziqli differensial tenglama bo'ladi. Uni chiziqli tenglamani yechish formulasiga asosan

$$x = e^{\int \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\left[\int \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp} dp + C\right] \qquad (4)$$

topamiz va (2) tenglamadan p parametrni yo'qotsak, (1) Lagranj tenglamasini umumiy integrali $\hat{O}(x, y, C) = 0$ hosil bo'ladi.

5-misol: $y = xy'^2 + y'^2$ tenglamani yeching.

Yechish: $y' = p$ deb olsak, $y = xp^2 + p^2$ bo'ladi. x ga nisbatan differensiallab,

$$p = p^2 + (2xp + 2p)\frac{dp}{dx} \qquad (*)$$

tenglamani hosil qilamiz. Maxsus yechimlari $p_0 = 0$ va $p_1 = 1$ bo'lganda, $p = p^2$ bo'lgani uchun yechimlar chiziqli funksiyalardan iborat bo'ladi. $y = x \cdot 0^2 + 0^2$, ya'ni $y = 0$ va $y = x + 1$ umumiy integralni topish uchun (*)ni ko'rinishda yozamiz va x ni erkli o'zgaruvchi R ning funksiyasi deb qaraymiz. Hosil qilingan chiziqli tenglamani integrallaymiz. Bunldan va tenglamalardan R ni yo'qotsak umumiy integral hosil bo'ladi.